Matematický model elektrické sítě

Miloš Křivan

2025

Obsah:

1. Úvod 5

2. Elektromechanická dynamika synchronního turbosoustrojí 6

3. Elektromagnetická dynamika přenosu výkonu dopravní tratí 10

4. Napěťová stabilita přenosu výkonu dopravní tratí 15

5. Elektrický periodický výkon 18

5.1. Periodický harmonický výkon 18

5.2. Periodický neharmonický výkon 19

6. Výpočet ustáleného chodu sítě 21

6.1. Bezporuchový chod obecné sítě 21

6.2. Bezporuchový chod radiální sítě 23

6.3. Poruchový chod sítě 24

7. Lagrangeova optimalizace 33

7.1. Optimální chod sítě 36

7.2. Řazení zdrojů 37

8. Fourierova transformace 38

1. Úvod

Předkládaný materiál je určen pro čtenáře se základními znalostmi elektroenergetiky a hlubšími znalostmi matematické analýzy.

V předkládaném materiálu je provedeno matematické modelování některých jevů v třífázové elektrické síti, a to jak dynamických (kap. 2 a 3), tak statických (kap. 4 a 5), tj. kap. 2 a 3 modelují okamžité stavy sítě spojitě se měnící v čase a kap. 4 a 5 modelují ustálené harmonické stavy sítě.

Kapitola 2 popisuje elektromechanický přechodový děj, vyvolaný změnou zatížení synchronního turbosoustrojí, tj. změnou elektromagnetického momentu na jeho hřídeli, projevující se kýváním hřídele, tj. rozkmitáním úhlové frekvence sítě.

Kapitola 3 popisuje elektromagnetické přechodové děje na vedení sítě, tj. vlnovou rovnici homogenního vedení s rozloženými parametry, tj. šíření proudových resp. napěťových vln podél vedení sítě.

Kapitola 4 popisuje analytické řešení napěťové stability zatěžovaného třífázového vedení sítě a kapitola 5 popisuje numerické resp. analytické řešení ustáleného bezporuchového resp. poruchového chodu obecné či radiální sítě, a to při zanedbání příčných parametrů vedení, přičemž výpočet bezporuchového chodu sítě je formulován stručněji, na rozdíl od výpočtu poruchového chodu sítě, který je formulován podrobněji.

Jako dodatek je v předkládaném materiálu uvedena matematická formulace optimalizace Lagrangeovými multiplikátory, užívané k optimalizaci nákladů vyráběného či přenášeného výkonu, tj. k optimalizaci řazení zdrojů a chodu sítě, a matematická formulace Fourierovy transformace, užívané k popisu poruch harmonického průběhu proudu resp. napětí sítě.

Předkládaný materiál neobsahuje matematicko fyzikální popis elektrických strojů a přístrojů, s výjimkou pohybové rovnice synchronního turbosoustrojí.

2. Elektromechanická dynamika synchronního turbosoustrojí

Pro úhlovou rychlost, kolísající okolo své ustálené hodnoty a jí příslušný úhel:

$$\theta(t) = \omega(\infty)\, t + \delta(t) \qquad \frac{d}{dt}\theta(t) = \omega(\infty) + \frac{d}{dt}\delta(t) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t)$$

$$\Delta\omega(t) \equiv \frac{d}{dt}\delta(t) \qquad \Rightarrow \qquad \omega(t) = \omega(\infty) + \Delta\omega(t) \qquad \frac{d}{dt}\omega(t) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(t)$$

zapišme pohybovou rovnici (ď Alembert) otáčející se hřídele synchronního turbosoustrojí:

$$A\frac{d}{dt}\omega(t) + B\omega(t) = M_h - M_e \qquad M_h = M_m + B\omega(\infty) \qquad M_e = C\sin\delta(t)$$

a dosaďme (viz výše):

$$A\frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + B\left(\omega(\infty) + \frac{d}{dt}\delta(t)\right) = M_m + B\omega(\infty) - C\sin\delta(t)$$

a uvažujme malý úhel:

$$A\frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + B\frac{d}{dt}\delta(t) + C\delta(t) = M_m$$

a dále předpokládejme:

$$2\alpha \equiv \frac{B}{A} \qquad \beta^2 \equiv \frac{C}{A} \qquad \gamma \equiv \frac{M_m}{A} \qquad A, B, C > 0 \qquad \alpha^2 > \beta^2$$

pak rovnici dostaneme ve tvaru:

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta(t) + 2\alpha\frac{d}{dt}\delta(t) + \beta^2\delta(t) = \gamma$$

kde: M_h – hnací moment
M_m – mechanický moment
M_e – elektromagnetický moment
A – moment setrvačnosti
B – tlumící konstanta
C – synchronizační konstanta

a její charakteristickou rovnici resp. řešení homogenní rovnice pak dostaneme ve tvaru:

$$\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \beta^2 = 0 \qquad \lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \qquad \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$$

resp.

$$\delta(t) = c_1(t)e^{\lambda_1 t} + c_2(t)e^{\lambda_2 t}$$

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \lambda_1 c_1(t)e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2(t)e^{\lambda_2 t} + \dot{c_1}(t)e^{\lambda_1 t} + \dot{c_2}(t)e^{\lambda_2 t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta(t) = \lambda_1^2 c_1(t)e^{\lambda_1 t} + \lambda_2^2 c_2(t)e^{\lambda_2 t} + \lambda_1\dot{c_1}(t)e^{\lambda_1 t} + \lambda_2\dot{c_2}(t)e^{\lambda_2 t}$$

které následně dosadíme do rovnice s pravou stranou:

$$\lambda_1\dot{c_1}(t)e^{\lambda_1 t} + \lambda_2\dot{c_2}(t)e^{\lambda_2 t} + (\lambda_1^2 + 2\alpha\lambda_1 + \beta^2)c_1(t)e^{\lambda_1 t} + (\lambda_2^2 + 2\alpha\lambda_2 + \beta^2)c_2(t)e^{\lambda_2 t} = \gamma$$

a po dosazení za kořeny charakteristické rovnice:

$$\lambda_1^2 + 2\alpha\lambda_1 + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta^2 = 0$$

$$\lambda_2^2 + 2\alpha\lambda_2 + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha^2 - 2\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta^2 = 0$$

obdržíme k řešení následující soustavu lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \dot{c_1}(t)\, e^{\lambda_1 t} + \quad \dot{c_2}(t)\, e^{\lambda_2 t} &= 0 \qquad \text{(volitelná podmínka metody variace konstant)} \\ \lambda_1 \dot{c_1}(t)\, e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \dot{c_2}(t)\, e^{\lambda_2 t} &= \gamma \end{aligned}$$

a z jejích Wronskiánů:

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) t}$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda_2 t} \\ \gamma & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{vmatrix} = -\gamma e^{\lambda_2 t} \qquad W_2 = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \gamma \end{vmatrix} = \gamma e^{\lambda_1 t}$$

určíme derivace variovaných konstant:

$$\dot{c_1}(t) = \frac{W_1}{W} = \frac{-\gamma}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} \qquad \dot{c_2}(t) = \frac{W_2}{W} = \frac{\gamma}{(\lambda_2 - \lambda_1)} e^{-\lambda_2 t}$$

které následně integrujeme:

$$c_1(t) = \frac{\gamma}{(\lambda_1 - \lambda_2)} \int e^{-\lambda_1 t}\, dt = \frac{\gamma e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} + k_1$$

$$c_2(t) = \frac{\gamma}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \int e^{-\lambda_2 t}\, dt = \frac{\gamma e^{-\lambda_2 t}}{\lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2)} + k_2$$

a dosadíme do řešení homogenní rovnice, čímž obdržíme řešení rovnice s pravou stranou:

$$\delta(t) = \frac{\gamma}{\lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)} + k_1 e^{\lambda_1 t} + \frac{-\gamma}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} + k_2 e^{\lambda_2 t} = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} + k_3$$

$$k_3 = \frac{\gamma}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{\gamma}{\beta^2} = \frac{M_m}{C}$$

První dvě konstanty uvedeného řešení určíme řešením následující soustavy lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} \delta(0) &= k_1 + k_2 + k_3 \\ \frac{d}{dt}\delta(0) &= \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 = \Delta\omega(0) \end{aligned}$$

tj.:

$$\begin{aligned} k_1 \; + \quad k_2 &= \delta(0) - k_3 \\ \lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 &= \Delta\omega(0) \end{aligned}$$

tj.:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) = -\frac{1}{A}\sqrt{B^2 - 4AC} \neq 0$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} \delta(0) - k_3 & 1 \\ \Delta\omega(0) & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2(\delta(0) - k_3) - \Delta\omega(0)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} 1 & \delta(0) - k_3 \\ \lambda_1 & \Delta\omega(0) \end{vmatrix} = \Delta\omega(0) - \lambda_1(\delta(0) - k_3)$$

$$k_1 = \frac{W_1}{W} = \frac{\lambda_2(\delta(0) - k_3) - \Delta\omega(0)}{(\lambda_2 - \lambda_1)} \qquad k_2 = \frac{W_2}{W} = \frac{\Delta\omega(0) - \lambda_1(\delta(0) - k_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)}$$

Předpokládejme naopak:

$$\beta^2 > \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{-(\beta^2 - \alpha^2)} \equiv j\sqrt{\omega_0^2} = j\omega_0$$

pak nám řešení rovnice s pravou stranou přejde do tvaru:

$$\delta(t) = k_1 e^{(-\alpha + j\omega_0)t} + k_2 e^{(-\alpha - j\omega_0)t} + k_3 = \left(k_1 e^{j\omega_0 t} + k_2 e^{-j\omega_0 t}\right) e^{-\alpha t} + k_3$$

a dále ze vztahů:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta(\infty) = k_3 \qquad\qquad \Delta\delta(0) \equiv \delta(0) - \delta(\infty) \neq 0$$

$$\lambda_2 - \lambda_1 = -2j\omega_0 \qquad\qquad \lambda_2 + \lambda_1 = -2\alpha$$

$$k_1 = \frac{\lambda_2\, \Delta\delta(0) - \Delta\omega(0)}{-2j\omega_0} \qquad\qquad k_2 = \frac{\Delta\omega(0) - \lambda_1 \Delta\delta(0)}{-2j\omega_0}$$

$$k_1 + k_2 = \Delta\delta(0) \qquad\qquad k_1 - k_2 = \frac{\Delta\omega(0) + \alpha\Delta\delta(0)}{j\omega_0}$$

$$(k_1 + k_2)\cos\omega_0 t + j(k_1 - k_2)\sin\omega_0 t = \Delta\delta(0)(\cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}(\frac{\Delta\omega(0)}{\Delta\delta(0)} + \alpha)\sin\omega_0 t)$$

$$\frac{d}{dt}\omega(0) = \frac{d^2}{dt^2}\delta(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha\, \Delta\omega(0) + \beta^2\delta(0) = \gamma \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega(0) = \frac{1}{2\alpha}(\gamma - \beta^2\delta(0))$$

$$\frac{\Delta\omega(0)}{\Delta\delta(0)} = \frac{\frac{1}{2\alpha}(\gamma - \beta^2\delta(0))}{\delta(0) - \frac{\gamma}{\beta^2}} = \frac{(\gamma - \beta^2\delta(0))}{-2\frac{\alpha}{\beta^2}(\gamma - \beta^2\delta(0))} = -\frac{\beta^2}{2\alpha} \equiv \omega_1$$

plyne aktualizace výše uvedeného obecného řešení, tj. řešení partikulární:

$$\delta(t) = \Delta\delta(0)\,(\cos\omega_0 t + \frac{1}{\omega_0}(\alpha - \omega_1)\sin\omega_0 t)\, e^{-\alpha t} + \delta(\infty) \qquad\qquad \delta(0) = \Delta\delta(0) + \delta(\infty)$$

Zaveďme úhel φ:

$$\frac{1}{\omega_0}(\alpha - \omega_1) \equiv \frac{1}{\mathrm{tg}\,\varphi}$$

pak:

$$1 + (\frac{\alpha^2 - \omega_0^2}{2\alpha\omega_0})^2 = 1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\sin^2\varphi} = \frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}$$

$$\cos\omega_0 t + \frac{\sin\omega_0 t}{\mathrm{tg}\,\varphi} = \frac{\sin(\omega_0 t + \varphi)}{\sin\varphi}$$

tj.:

$$\delta(t) = \Delta\omega(0)\, e^{-\alpha t}\, \frac{1}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \varphi) + \delta(\infty)$$

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \Delta\omega(0)\, e^{-\alpha t}\, (\cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t + \varphi))$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta(t) = -\alpha\,\Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}\,(\cos(\omega_0 t+\varphi) - \frac{\alpha}{\omega_0}\sin(\omega_0 t+\varphi)) -$$
$$-\Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}\,(\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi) + \alpha\cos(\omega_0 t+\varphi)) =$$
$$= -\Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}\,(2\alpha\cos(\omega_0 t+\varphi) + (\omega_0 - \frac{\alpha^2}{\omega_0})\sin(\omega_0 t+\varphi))$$

Řešení pohybové rovnice spolu s jeho první a druhou derivací dosaďme do pohybové rovnice:

$$-2\alpha\,\Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t+\varphi) - \Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}(\frac{\omega_0^2-\alpha^2}{\omega_0})\sin(\omega_0 t+\varphi) +$$
$$+2\alpha\,\Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t+\varphi) - \Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}2\,\frac{\alpha^2}{\omega_0}\sin(\omega_0 t+\varphi) +$$
$$+\,\Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}\,\frac{\beta^2}{\omega_0}\sin(\omega_0 t+\varphi) + \gamma = \gamma$$

a tím proveďme zkoušku jeho správnosti. Po dosazení je pohybová rovnice splněna, neboť:

$$\beta^2 - 2\alpha^2 - \omega_0^2 + \alpha^2 = \beta^2 - \alpha^2 - \beta^2 + \alpha^2 = 0$$

Zaveďme úhly ψ a ϑ:

$$-\frac{\alpha}{\omega_0} \equiv \frac{1}{\mathrm{tg}\,\psi} \qquad\qquad \vartheta = \varphi + \psi$$

pak:

$$1 + \frac{\alpha^2}{\omega_0^2} = 1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\psi} = \frac{1}{\sin^2\psi} = \frac{\beta^2}{\omega_0^2}$$

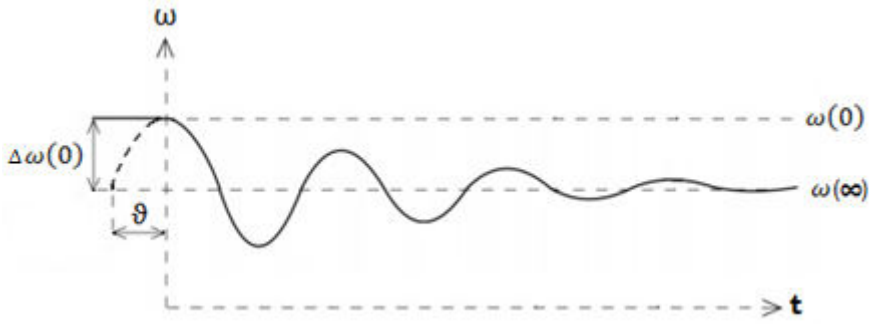
$$\cos(\omega_0 t+\varphi) + \frac{\sin(\omega_0 t+\varphi)}{\mathrm{tg}\,\psi} = \frac{\sin(\omega_0 t+\vartheta)}{\sin\psi}$$

tj.:

$$\frac{d}{dt}\delta(t) = \Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}\,\frac{\beta}{\omega_0}\sin(\omega_0 t+\vartheta) = \Delta\omega(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\beta}{\omega_0}\sin\vartheta = 1$$

takže:

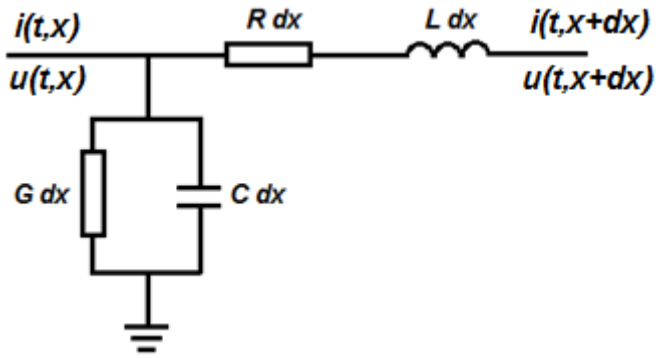
$$\omega(t) = \omega(\infty) + \Delta\omega(0)\,e^{-\alpha t}\,\frac{\beta}{\omega_0}\sin(\omega_0 t+\vartheta)$$



Připomeňme, že výše uvedené řešení pohybové rovnice je platné za podmínky $4AC > B^2$ při nárůstu ($\Delta\omega(0) > 0$) malého zátěžného úhlu δ a v kterém ω_0 představuje úhlovou frekvenci kývání rotoru.

3. Elektromagnetická dynamika přenosu výkonu dopravní tratí

Uvažujme element dx homogenního elektrického vedení délky l modelovaný Γ-článkem:



pro který platí dle 1. resp. 2. Kirchhoffova zákona následující rovnice:

$$-i(t,x) + G\,u(t,x)\,dx + C\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)\,dx + i(t,x+dx) = 0$$
$$-u(t,x) + R\,i(t,x+dx)\,dx + L\frac{\partial}{\partial t}i(t,x+dx)\,dx + u(t,x+dx) = 0$$

tj.:

$$-\frac{i(t,x+dx) - i(t,x)}{dx} = G\,u(t,x) + C\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)$$
$$-\frac{u(t,x+dx) - u(t,x)}{dx} = R\,i(t,x+dx) + L\frac{\partial}{\partial t}i(t,x+dx)$$

z nichž za předpokladu $i(t,x) \approx i(t,x+dx)$ dostaneme tzv. telegrafní rovnice:

$$-\frac{\partial}{\partial x}i(t,x) = G\,u(t,x) + C\frac{\partial}{\partial t}u(t,x)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) = R\,i(t,x) + L\frac{\partial}{\partial t}i(t,x)$$

tj.:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}i(t,x) = G\,\frac{\partial}{\partial x}u(t,x) + C\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}u(t,x)$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x) = R\,\frac{\partial}{\partial x}i(t,x) + L\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial x}i(t,x)$$

a

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}i(t,x) = G\,\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) + C\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t,x)$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial t}u(t,x) = R\,\frac{\partial}{\partial t}i(t,x) + L\frac{\partial^2}{\partial t^2}i(t,x)$$

Z výše uvedeného lze sestavit následující vlnové rovnice, tj. rovnice hyperbolického typu:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} i(t,x) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} i(t,x) - B\frac{\partial}{\partial t} i(t,x) - A\, i(t,x) = 0$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) - B\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - A\, u(t,x) = 0$$

$$c^2 = \frac{1}{LC} \qquad B = (RC + LG) \qquad A = RG$$

řešitelné při znalosti soustavy počátečních podmínek a okrajových podmínek I. druhu:

$$i(0,x) \equiv \psi_i(x) \qquad i(t,0) \equiv \mu_i(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} i(0,x) \equiv \dot{\psi}_i(x) \qquad i(t,l) \equiv \nu_i(t)$$

$$u(0,x) \equiv \psi_u(x) \qquad u(t,0) \equiv \mu_u(t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(0,x) \equiv \dot{\psi}_u(x) \qquad u(t,l) \equiv \nu_u(t)$$

kde c je rychlost šíření vlny a B je konstanta tlumení vlny. Uvažujme řešení parciálních rovnic ve tvaru:

$$i(t,x) = \boldsymbol{I}(x)e^{j\omega t} \qquad u(t,x) = \boldsymbol{U}(x)e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} i(t,x) = j\omega \boldsymbol{I}(x)e^{j\omega t} \qquad \frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = j\omega \boldsymbol{U}(x)e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} i(t,x) = -\omega^2 \boldsymbol{I}(x)e^{j\omega t} \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = -\omega^2 \boldsymbol{U}(x)e^{j\omega t}$$

kde $\boldsymbol{I}$ a $\boldsymbol{U}$ jsou fázory proudu a napětí, pak dosazením uvažovaných řešení do parciálních rovnic dostaneme rovnice obyčejné:

$$\frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{I}(x) - \boldsymbol{p}^2\, \boldsymbol{I}(x) = 0 \qquad \frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{U}(x) - \boldsymbol{p}^2\, \boldsymbol{U}(x) = 0$$

tj. jejich charakteristické rovnice resp. obecná řešení dostaneme ve tvaru:

$$\lambda^2 - \boldsymbol{p}^2 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm \boldsymbol{p} \qquad \boldsymbol{p}^2 = (R + j\omega L)(G + j\omega C) = \boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{Y}$$

resp.

$$\boldsymbol{I}(x) = c_1 e^{\boldsymbol{p}x} + c_2 e^{-\boldsymbol{p}x} \qquad \boldsymbol{U}(x) = c_3 e^{\boldsymbol{p}x} + c_4 e^{-\boldsymbol{p}x}$$

$$\frac{d}{dx}\boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{p}c_1 e^{\boldsymbol{p}x} - \boldsymbol{p}c_2 e^{-\boldsymbol{p}x} \qquad \frac{d}{dx}\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{p}c_3 e^{\boldsymbol{p}x} - \boldsymbol{p}c_4 e^{-\boldsymbol{p}x}$$

a dosazením uvažovaných řešení vlnových rovnic do telegrafních rovnic dostaneme rovnice:

$$-\frac{d}{dx}\boldsymbol{I}(x) = G\, \boldsymbol{U}(x) + j\omega C\, \boldsymbol{U}(x) \qquad -\frac{d}{dx}\boldsymbol{U}(x) = R\, \boldsymbol{I}(x) + j\omega L\, \boldsymbol{I}(x)$$

tj. pro $\boldsymbol{Z}_0 \equiv \sqrt{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{Y}}$ a $\boldsymbol{Y}_0 \equiv \sqrt{\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{Z}}$ můžeme fázor proudu vyjádřit pomocí fázoru napětí takto:

$$\boldsymbol{I}(x) = -\frac{1}{\boldsymbol{Z}}\frac{d}{dx}\boldsymbol{U}(x) = -\frac{\sqrt{\boldsymbol{ZY}}}{\boldsymbol{Z}}(c_3 e^{\boldsymbol{p}x} - c_4 e^{-\boldsymbol{p}x}) = -\frac{1}{\boldsymbol{Z}_0}(c_3 e^{\boldsymbol{p}x} - c_4 e^{-\boldsymbol{p}x})$$

Uvažujme okrajové podmínky μ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}(0) &= k_1 + k_2 & \boldsymbol{U}(0) &= k_3 + k_4 \\ \frac{d}{dx}\boldsymbol{I}(0) &= \boldsymbol{p}k_1 - \boldsymbol{p}k_2 & \frac{d}{dx}\boldsymbol{U}(0) &= \boldsymbol{p}k_3 - \boldsymbol{p}k_4 \end{aligned}$$

tj. dostaneme soustavy následujících lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= \boldsymbol{I}(0) & k_3 + k_4 &= \boldsymbol{U}(0) \\ \boldsymbol{p}k_1 - \boldsymbol{p}k_2 &= -\boldsymbol{Y}\,\boldsymbol{U}(0) & \boldsymbol{p}k_3 - \boldsymbol{p}k_4 &= -\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{I}(0) \end{aligned}$$

jejichž řešením určíme uvedené konstanty:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}(0) - \boldsymbol{Y}_0\boldsymbol{U}(0)) & k_3 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}(0) - \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{I}(0)) \\ k_2 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{I}(0) + \boldsymbol{Y}_0\boldsymbol{U}(0)) & k_4 &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}(0) + \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{I}(0)) \end{aligned}$$

Určené konstanty dosadíme do obecných řešení výše uvedených obyčejných vlnových rovnic:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I}(x) &= \boldsymbol{I}(0)\cosh\boldsymbol{p}x - \boldsymbol{Y}_0\boldsymbol{U}(0)\sinh\boldsymbol{p}x = \psi_i(x) \\ \boldsymbol{U}(x) &= \boldsymbol{U}(0)\cosh\boldsymbol{p}x - \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{I}(0)\sinh\boldsymbol{p}x = \psi_u(x) \end{aligned}$$

čímž obdržíme partikulární fázorové řešení vlnových rovnic splňující podmínky ψ a μ.

Uvažujme okrajové podmínky ν:

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{I}(l) &= \frac{1}{\boldsymbol{Z}_0}(k_5 e^{\boldsymbol{p}l} - k_6 e^{-\boldsymbol{p}l}) \\ \boldsymbol{U}(l) &= \quad k_5 e^{\boldsymbol{p}l} + k_6 e^{-\boldsymbol{p}l} \end{aligned}$$

pak řešením výše uvedené soustavy lineárních rovnic určíme uvedené konstanty:

$$k_5 = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}(l) - \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{I}(l)\right)e^{-\boldsymbol{p}l} \qquad k_6 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{U}(l) + \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{I}(l))\,e^{\boldsymbol{p}l}$$

Určené konstanty dosadíme do vyjádření fázoru proudu pomocí fázoru napětí a obecného řešení vlnové rovnice pro napětí:

$$\boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{I}(l)\cosh \boldsymbol{p}(x-l) - \boldsymbol{Y}_0\boldsymbol{U}(l)\sinh \boldsymbol{p}(x-l) = \psi_i(x)$$
$$\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{U}(l)\cosh \boldsymbol{p}(x-l) - \boldsymbol{Z}_0\boldsymbol{I}(l)\sinh \boldsymbol{p}(x-l) = \psi_u(x)$$

čímž obdržíme partikulární fázorové řešení vlnových rovnic splňující podmínky ψ a ν.

Zanedbejme nyní následující parametry, tj. $R = G = 0$, pak vlnovou impedanci, parametr šíření a konstantu tlumení dostaneme ve tvaru:

$$\boldsymbol{Z}_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \equiv Z_0 \equiv \frac{1}{Y_0} \qquad \boldsymbol{p} = j\omega\sqrt{LC} = j\frac{2\pi f}{c} = j\frac{2\pi}{\lambda} \equiv jp \qquad B = 0$$

a vlnové rovnice za podmínek μ resp. ν ve tvaru:

$$\boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{I}(0)\cos px - jY_0\boldsymbol{U}(0)\sin px$$
$$\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{U}(0)\cos px - jZ_0\boldsymbol{I}(0)\sin px$$

resp.

$$\boldsymbol{I}(x) = \boldsymbol{I}(l)\cos p(x-l) - jY_0\boldsymbol{U}(l)\sin p(x-l)$$
$$\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{U}(l)\cos p(x-l) - jZ_0\boldsymbol{I}(l)\sin p(x-l)$$

pak můžeme vyjádřit impedance na konci a počátku vedení následovně:

$$\boldsymbol{Z}_k = \frac{\boldsymbol{U}(l)}{\boldsymbol{I}(l)} \qquad \boldsymbol{Z}_p = \frac{\boldsymbol{U}(0)}{\boldsymbol{I}(0)} = Z_0\frac{\boldsymbol{Z}_k + jZ_0\,\mathrm{tg}\,pl}{Z_0 + j\boldsymbol{Z}_k\,\mathrm{tg}\,pl}$$

tj. pro:

$$\boldsymbol{Z}_k = Z_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{Z}_p = Z_0$$

a pro vedení nakrátko:

$$\boldsymbol{Z}_k = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{Z}_p = jZ_0\,\mathrm{tg}\,pl = jZ_0\,\mathrm{tg}\frac{2\pi}{\lambda}l$$

tj. pro $l = \frac{1}{8}\lambda$:

$$\boldsymbol{Z}_p = jZ_0\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = jZ_0$$

tj. pro $l = \frac{3}{8}\lambda$:

$$\boldsymbol{Z}_p = jZ_0\,\mathrm{tg}\frac{3}{4}\pi = -jZ_0$$

tj. pro $l = \frac{1}{4}\lambda$:

$$\boldsymbol{Z}_p = jZ_0\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$$

tj. pro $l = \frac{1}{2}\lambda$:

$$\boldsymbol{Z}_p = jZ_0\,\mathrm{tg}\,\pi = 0$$

a pro vedení naprázdno:

$$\boldsymbol{Z}_k \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{\boldsymbol{Z}_k \to \infty} \boldsymbol{Z}_p = -j\frac{Z_0}{\operatorname{tg} pl} = -jZ_0\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}l}$$

tj. pro $l = \frac{1}{8}\lambda$:

$$\boldsymbol{Z}_p = -j\frac{Z_0}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = -jZ_0$$

tj. pro $l = \frac{3}{8}\lambda$:

$$\boldsymbol{Z}_p = -j\frac{Z_0}{\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi} = jZ_0$$

tj. pro $l = \frac{1}{4}\lambda$:

$$\boldsymbol{Z}_p = -j\frac{Z_0}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}} = 0$$

tj. pro $l = \frac{1}{2}\,\lambda$:

$$\boldsymbol{Z}_p = -j\frac{Z_0}{\operatorname{tg}\pi} = \infty$$

Proveďme ještě zkoušku konzistence telegrafních rovnic s vlnovými rovnicemi, tj. z telegrafních rovnic ve fázorovém tvaru určeme druhou derivaci fázoru proudu:

$$\frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{I}(x) = (RG + j\omega CR + j\omega LG - \omega L\omega C)\,\boldsymbol{I}(x)$$

kterou když dosadíme do proudové vlnové rovnice ve fázorovém tvaru, dostaneme rovnici:

$$\frac{d^2}{dx^2}\boldsymbol{I}(x) - (RG + j\omega CR + j\omega LG - \omega L\omega C)\,\boldsymbol{I}(x) = 0$$

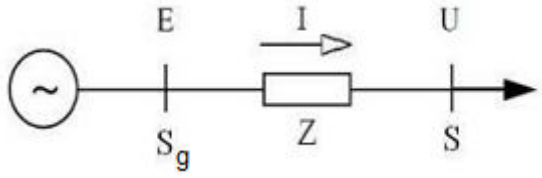
která je jistě splněna, totéž analogicky platí i pro druhou derivaci fázoru napětí, dosazenou do napěťové vlnové rovnice ve fázorovém tvaru.

Závěrem poznamenejme, že při znalosti průběhu funkcí $i(t,x)$ a $u(t,x)$ lze určit okamžitou ztrátu přenášeného výkonu pohlcenou odporem a svodem vedení a okamžitou velikost energie akumulovanou v indukčnosti a kapacitě vedení:

$$p_z(t) = \int_0^l \left(R\,i^2(t,x) + G\,u^2(t,x)\right)dx \qquad w_{ak}(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(L\,i^2(t,x) + C\,u^2(t,x)\right)dx$$

4. Napěťová stabilita přenosu výkonu dopravní tratí

Předpokládejme harmonické symetrické zatížení třífázového vedení, modelovaného danou impedancí, napájeného zdrojem udržujícím stálé harmonické napětí v napájecím bodě:



pak dle 2. Kirchhoffova zákona pro fázory sdružených napětí platí:

$$\boldsymbol{E} - \boldsymbol{U} = \sqrt{3}\,\boldsymbol{Z}\,\boldsymbol{I}$$

a po roznásobení výše uvedené rovnice činitelem $\sqrt{3}\boldsymbol{I}^*$ dostaneme:

$$\boldsymbol{S}_g - \boldsymbol{S} = 3\,\boldsymbol{Z}\,I^2$$

tj.:

$$\left|\boldsymbol{S}_g - \boldsymbol{S}\right| = 3\,|\boldsymbol{Z}|\,I^2$$

tj. pro $Z^2 = R^2 + X^2$ a $S^2 = P^2 + Q^2$ po povýšení obou stran výše uvedené rovnice na druhou dostaneme:

$$S_g^2 - S^2 - 2 \cdot 3I^2(RP + XQ) = (3I^2)^2 Z^2$$

a po roznásobení výše uvedené rovnice převrácenou hodnotou činitele $3I^2$ dostaneme:

$$E^2 - U^2 - 2(RP + XQ) = Z^2 \frac{S^2}{U^2}$$

a po dalším roznásobení výše uvedené rovnice činitelem $-U^2$ dostaneme tzv. nosovou křivku:

$$U^4 - 2\,(\frac{1}{2}E^2 - (RP + XQ))\,U^2 = -Z^2S^2$$

tj. pro $\alpha = \frac{1}{2}E^2 - (RP + XQ)$ a $\beta = Z^2S^2$ dostaneme:

$$f(U) \equiv U^4 - 2\alpha\,U^2 + \beta = 0$$

tj.:

$$U^4 - 2\alpha\,U^2 + \alpha^2 - \alpha^2 + \beta = 0$$

tj.:

$$(U^2 - \alpha)^2 = \alpha^2 - \beta$$

Položením derivace funkce f nule určíme napětí U_0, v kterém funkce nabývá maxima P_0:

$$\frac{df}{dU} = 4U^3 - 4\alpha\, U = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0^2 = \alpha$$

pro které platí:

$$\alpha^2 - 2\alpha^2 + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \beta$$

tj.:

$$\frac{1}{4}E^4 - E^2(RP_0 + XQ_0) + (RP_0 + XQ_0)^2 = (R^2 + X^2)(P_0^2 + Q_0^2)$$

tj.:

$$\frac{1}{4}E^4 - E^2(RP_0 + XQ_0) + R^2P_0^2 + 2RP_0XQ_0 + X^2Q_0^2 = R^2P_0^2 + X^2P_0^2 + R^2Q_0^2 + X^2Q_0^2$$

tj.:

$$\frac{1}{4}E^4 - E^2(RP_0 + XQ_0) = X^2P_0^2 - 2RP_0XQ_0 + R^2Q_0^2 = (XP_0 - RQ_0)^2$$

tj. pro $P_0 \neq 0$ a účiník $cos\,\varphi$:

$$(X - R\,tg\varphi)^2P_0^2 + E^2(R + X\,tg\varphi)P_0 - \frac{1}{4}E^4 = 0$$

Dále určíme diskriminant výše uvedené kvadratické rovnice o parametrech R, X, E, φ:

$$D = E^4(R + Xtg\varphi)^2 + (X - R\,tg\varphi)^2E^4 = E^4Z^2(1 + tg^2\varphi) = \frac{E^4Z^2}{cos^2\varphi} > 0$$

a její kořeny:

$$P_{01} = \frac{-E^2(R + Xtg\varphi) + \frac{E^2Z}{cos\varphi}}{2(X - R\,tg\varphi)^2} = \frac{E^2(Z\ -(Rcos\varphi + Xsin\varphi))}{2(Xcos\varphi - R\,sin\varphi)^2}cos\varphi > 0$$

$$P_{02} = \frac{-E^2(R + Xtg\varphi) - \frac{E^2Z}{cos\varphi}}{2(X - R\,tg\varphi)^2} = -\frac{E^2(Z + (Rcos\varphi + Xsin\varphi))}{2(Xcos\varphi - R\,sin\varphi)^2}cos\varphi < 0$$

jejichž vyjádření dává smysl při splnění následujících tří podmínek:

$$\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \qquad PX \neq QR \qquad Z\ \pm (Rcos\varphi + Xsin\varphi) > 0$$

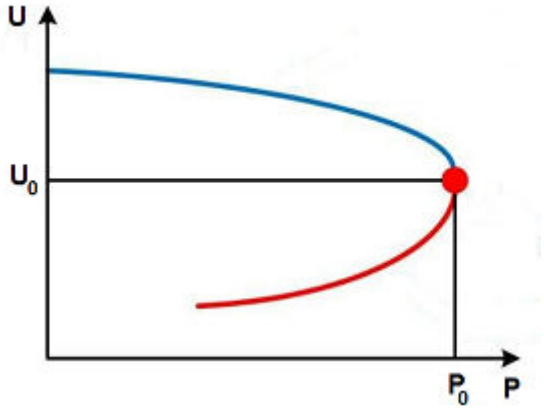
přičemž druhý kořen nemá smysl uvažovat, pak limitní pracovní bod $[P_0, U_0]$ určíme následovně:

$$P_0 = \frac{E^2(Z\ -(Rcos\varphi + Xsin\varphi))}{2(Xcos\varphi - R\,sin\varphi)^2}cos\varphi \qquad U_0^2 = \frac{Z\,P_0}{cos\,\varphi}$$

tj. uvažujeme-li pouze činnou zátěž při zanedbání odporu, tj. $\varphi = 0$ a $R = 0$, dostaneme limitní pracovní bod ve tvaru:

$$P_0 = \frac{E^2}{2X} = \frac{U_0^2}{X} \qquad U_0 = \sqrt{X\,P_0} = \frac{E}{\sqrt{2}}$$

Z výše uvedeného plyne, že pohybuje-li se pracovní bod s rostoucím zatížením vedení zleva doprava po modré části nosové křivky, tak je napětí na konci vedení stabilní, překročí-li však pracovní bod svou limitní pozici, pak se bude pohybovat s klesajícím zatížením vedení zprava doleva po červené části nosové křivky při současném kolapsu napětí na konci vedení:



Nosová křivka

Uvažujeme-li $PX = QR$, pak nám výše uvedená kvadratická rovnice přejde za podmínky $R, X > 0$ do lineárního tvaru:

$$(X - X)^2 P_0^2 + E^2 (R + X\frac{X}{R})\, P_0 - \frac{1}{4} E^4 = 0$$

tj.:

$$\frac{Z^2}{R} P_0 = \frac{1}{4} E^2 \quad \Rightarrow \quad P_0 = R \left(\frac{E}{2\,Z}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad U_0 = \frac{E}{2}$$

kde:

$$U_0^2 = \frac{Z\,P_0}{cos\,\varphi} = \sqrt{(1 + tg^2\varphi)}\; Z\; R \left(\frac{E}{2\,Z}\right)^2 = \left(\frac{E}{2}\right)^2 \qquad \sqrt{(1 + tg^2\varphi)} = \frac{Z}{R}$$

5. Elektrický periodický výkon

5.1. Periodický harmonický výkon

Střední hodnotu reálného výkonu harmonického napětí a proudu určíme následovně:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\, i(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_\mathrm{m}\sin(\omega t+\varphi)\, I_\mathrm{m}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{UI}{T}\int_0^T \big(\cos(\varphi)-\cos(2\omega t+\varphi)\big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{UI}{2\omega T}\big(2\omega T\cos(\varphi)-\sin(2\omega T+\varphi)+\sin(\varphi)\big) = UI\cos\varphi$$

kde $\omega T = 2\pi$, U a I jsou efektivní hodnoty napětí a proudu, tj. $U_\mathrm{m} = \sqrt{2}U$ a $I_\mathrm{m} = \sqrt{2}I$, ω je úhlová frekvence a $\varphi \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$ je fázový posuv napětí vůči proudu. Hodnota fázového posuvu je určena parametry elektrického obvodu přenášejícího výkon, tj. rezistancí, indukčností a kapacitou, kosinus fázového posuvu $\cos\varphi \in \langle 0,1\rangle$ se nazývá účiník.

Reálný výkon $P = UI\cos\varphi$ lze matematicky interpretovat jako reálnou část komplexního výkonu $S = UI$ a imaginární výkon $Q = UI\sin\varphi$ pak lze matematicky interpretovat jako imaginární část komplexního výkonu. Imaginární výkon lze fyzikálně interpretovat jako energii, která se obvodem během periody přelévá tam a zpět (a způsobuje v části periody zápornou hodnotu okamžitého reálného výkonu), což je způsobeno tím, že elektrická energie v jedné části periody v kondenzátoru (kapacitě), resp. cívce (indukčnosti), vytváří elektrické, resp. magnetické pole, a v druhé části periody pak tato pole zanikají a stejnou energii vracejí zpět do obvodu. Imaginární výkon na rozdíl od reálného výkonu tedy nekoná žádnou využitelnou práci, proto se nazývá ***jalový výkon***, reálný výkon se pak nazývá ***činný výkon***, přičemž norma komplexního výkonu se nazývá ***zdánlivý výkon***. Zdánlivý výkon lze také chápat jako největší možný výkon dosažitelný při nulovém fázovém posuvu, tj. jednotkovém účiníku (odporový charakter obvodu). Podle toho, zda má obvod indukční nebo kapacitní charakter, tj. zda je fázový posuv kladný nebo záporný, může být jalový výkon na rozdíl od činného výkonu jak kladný tak záporný, pokud napětí předbíhá proud (indukční charakter), je výkon kladný, pokud se napětí zpožďuje za proudem (kapacitní charakter), je výkon záporný. Přestože jalový výkon nekoná žádnou využitelnou práci, obvodem se přenáší a působí tak ztráty činného výkonu, tj. snahou tedy je přenášený jalový výkon minimalizovat užitím tzv. kompenzátorů účiníku. Komplexní výkon lze zapsat jako součin fázoru napětí a komplexně sdruženého fázoru proudu:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{UI}^* = Ue^{j(\alpha+\varphi)}Ie^{-j\alpha} = UIe^{j\varphi} = UI(\cos\varphi + j\sin\varphi) = P + jQ, \text{ tj. } S = \sqrt{P^2+Q^2}$$

V třífázové síti pak dostaneme $\boldsymbol{S} = 3\boldsymbol{U}_f\boldsymbol{I}^* = \sqrt{3}\boldsymbol{U}\boldsymbol{I}^*$, kde $\boldsymbol{U}_f$ resp. $\boldsymbol{U}$ jsou fázory fázového resp. sdruženého napětí. Okamžitou hodnotu výkonu harmonického napětí a proudu určíme následovně:

$$s(t) = u(t)\,i(t) = U_\mathrm{m}\sin(\omega t + \varphi)\,I_\mathrm{m}\sin(\omega t) = UI\big(\cos\varphi - \cos(2\omega t + \varphi)\big) = \\ = P(1 - \cos 2\omega t) + Q\sin 2\omega t = p(t) + q(t)$$

kde $\cos(2\omega t + \varphi)) = \cos 2\omega t\cos\varphi + \sin 2\omega t\sin\varphi$ a $s(t), p(t), q(t)$ jsou okamžité hodnoty zdánlivého, činného a jalového výkonu. Střední hodnotu činného resp. jalového výkonu harmonického napětí a proudu pak určíme následovně:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T p\,(t)\,\mathrm{d}t = \frac{P}{T}\int_0^T (1 - \cos 2\omega t)\;\mathrm{d}t = P$$

resp.

$$\bar{Q} = \frac{1}{T}\int_0^T q\,(t)\,\mathrm{d}t = \frac{Q}{T}\int_0^T \sin 2\omega t\,\mathrm{d}t = 0$$

tj. z nulové střední hodnoty jalového výkonu plyne, že jalový výkon na rozdíl od činného výkonu nekoná žádnou využitelnou práci, čímž je dokázáno výše uvedené tvrzení.

5.2. Periodický neharmonický výkon

Okamžitou hodnotu výkonu periodického napětí a proudu určíme jejím rozvojem ve Fourierovu řadu následovně:

$$s(t) = u(t)\,i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n\,I_n\cos\varphi_n + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{U}_n\,\bar{I}_n\sin\varphi_n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n$$

kde $\varphi_n = n\omega t$ a kde:

$$U_0 I_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\;i(t)\,\mathrm{d}t, U_n I_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\;i(t)\;\cos\varphi_n\,\mathrm{d}t, \bar{U}_n\bar{I}_n = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\;i(t)\;\sin\varphi_n\,\mathrm{d}t$$

pro $n = 1,2,3,\cdots$.

Veličiny $U_n, I_n, \bar{U}_n, \bar{I}_n, \varphi_n$ nemají fyzikální význam, jsou to matematické ekvivalenty harmonického průběhu. Vzhledem k tomu, že z Parsevalovy rovnosti plyne:

$$S^2 = \frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} U_n^2\, I_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{U}_n^2\, \bar{I}_n^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} P_n^2 + \sum_{n=0}^{\infty} Q_n^2 = P^2 + Q^2$$

zavádí se tzv. ***deformační výkon*** $D = \sqrt{S^2 - P^2 - Q^2}$ generovaný vyššími harmonickými napětí a proudu, pak dostaneme zdánlivý výkon $S = \sqrt{P^2 + Q^2 + D^2}$ a ekvivalentní účiník $\lambda = \frac{P}{S}$ jakožto analogie k harmonickému průběhu napětí a proudu.

6. Výpočet ustáleného chodu sítě

6.1. Bezporuchový chod obecné sítě

Zkonstruujme výkonovou bilanci v *i*-tém uzlu sítě o *n*-uzlech:

$$\boldsymbol{S}_i = \sqrt{3}\boldsymbol{U}_i\boldsymbol{I}_i^{*} = \boldsymbol{U}_i\sum \boldsymbol{Y}_{ij}{}^{*}\boldsymbol{U}_j^{*} = P_i + iQ_i \quad \text{kde} \quad i,j = 1,\dots,n$$

tj.:

$$f_i(\vec{U},\vec{\varphi}) = U_i\sum Y_{ij}U_j\cos(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_{ij}) = P_i$$

$$f_{i+n}(\vec{U},\vec{\varphi}) = U_i\sum Y_{ij}U_j\sin(\varphi_i - \varphi_j - \alpha_{ij}) = Q_i$$

Výpočet chodu sítě pak spočívá v řešení výše uvedené soustavy nelineárních rovnic uzlových komplexních výkonových bilancí pro velikosti a úhly napětí v uzlech např. Newtonovou iterační metodou podle věty o pevném bodě, zaručující existenci jistého okolí řešení s vlastností, že leží-li v něm počáteční aproximace řešení $\vec{x}_0$ tvořená jmenovitými napětími a nulovými úhly, algoritmus konverguje s přesností $\vec{\varepsilon}$ k řešení $\vec{x} = [\vec{U},\vec{\varphi}]$.

Funkce f_i můžeme totiž aproximovat pomocí prvních dvou členů *Taylorova* rozvoje následující linearizací:

$$f_i(\vec{x}_{p+1}) = f_i(\vec{x}_p) + df_i(\vec{x}_p) \qquad df_i(\vec{x}_p) = \nabla f_i(\vec{x}_p)(\vec{x}_{p+1} - \vec{x}_p) \qquad i = 1,\dots,2n$$

kde p je počítadlo iterací a df_i je *totální diferenciál* funkce f_i v daném bodě představující tečnou nadrovinu k funkci f_i v daném bodě a ∇f_i je *gradient* funkce f_i v daném bodě představující směr maximálního růstu funkce f_i v daném bodě a pro vektorovou funkci $\vec{f}$ pak můžeme zapsat pro $\vec{x}_{p+1}$ dostatečně blízké řešení $\vec{x}$:

$$\vec{f}(\vec{x}_{p+1}) = \vec{f}(\vec{x}_p) + \boldsymbol{J}(\vec{x}_p)(\vec{x}_{p+1} - \vec{x}_p) \le \vec{\varepsilon}$$

kde $\boldsymbol{J}$ je *Jacobiho* matice vyjadřující obecnou derivaci vektorové funkce $\vec{f}$ v daném bodě:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P_\varphi} & \boldsymbol{P_U} \\ \boldsymbol{Q_\varphi} & \boldsymbol{Q_U} \end{bmatrix}$$

tj. kde pro $\psi_{ij} = \varphi_i - \varphi_j - \alpha_{ij}$ a $i, j, k = 1, \dots, n$ platí:

$$\boldsymbol{P_\varphi} = \begin{bmatrix} -U_1 \sum_k a_{1k} + U_1 a_{11} & \cdots & U_1 a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n a_{n1} & \cdots & -U_n \sum_k a_{nk} + U_n a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q_\varphi} = \begin{bmatrix} U_1 \sum_k b_{1k} - U_1 b_{11} & \cdots & -U_1 b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -U_n b_{n1} & \cdots & U_n \sum_k b_{nk} - U_n b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P_U} = \begin{bmatrix} \sum_k b_{1k} + c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & \sum_k b_{nk} + c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{Q_U} = \begin{bmatrix} \sum_k a_{1k} + d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & \sum_k a_{nk} + d_{nn} \end{bmatrix}$$

kde:

$$a_{ij} = U_j Y_{ij} \sin \psi_{ij} \qquad b_{ij} = U_j Y_{ij} \cos \psi_{ij} \qquad c_{ij} = U_i Y_{ij} \cos \psi_{ij} \qquad d_{ij} = U_i Y_{ij} \sin \psi_{ij}$$

tj. Jacobiho matice výše uvedené soustavy nelineárních rovnic je singulární, regularity dosáhneme vypuštěním úhlu napětí libovolně vybraného uzlu sítě ze seznamu proměnných spolu s vypuštěním bilanční rovnice činného výkonu vybraného uzlu ze seznamu rovnic, tj. vypuštěním odpovídajícího sloupce a řádku matice s tím, že vypuštěný úhel napětí, v tzv. referenčním uzlu, pak musíme zadat, např. jako nulový, k němuž se pak všechny další úhly napětí ostatních uzlů sítě budou vztahovat, a ve vybraném uzlu pak lze dopočtem vyrovnat bilanci činného výkonu v síti.

6.2. Bezporuchový chod radiální sítě

Zkonstruujme výkonovou bilanci *i*-té větve sítě propojující uzly *i* a *i*+1:

$$\boldsymbol{S}_i - \boldsymbol{S}_{i+1} = \sqrt{3}(\boldsymbol{U}_i - \boldsymbol{U}_{i+1})\boldsymbol{I}_i^* = 3\boldsymbol{Z}_i \left|\frac{\boldsymbol{S}_i^*}{\sqrt{3}\boldsymbol{U}_i^*}\right|^2 = \boldsymbol{Z}_i \frac{P_i^2 + Q_i^2}{U_i^2}$$

tj.:

$$f_i^P(P_i, Q_i, U_i^2) = P_i - R_i \frac{P_i^2 + Q_i^2}{U_i^2} = P_{i+1}$$

$$f_i^Q(P_i, Q_i, U_i^2) = Q_i - X_i \frac{P_i^2 + Q_i^2}{U_i^2} = Q_{i+1}$$

$$f_i^U(P_i, Q_i, U_i^2) = U_i^2 - 2(R_i P_i + X_i Q_i) + Z_i^2 \frac{P_i^2 + Q_i^2}{U_i^2} = U_{i+1}^2$$

Výpočet chodu sítě pak spočívá v postupném řešení výše uvedených soustav nelineárních rovnic výkonových bilancí toků činných resp. jalových výkonů po větvích sítě spolu s napětím v jejich krajních uzlech, a to např. Newtonovou iterační metodou. Derivace funkcí f_i můžeme aproximovat při zavedení poměrných jednotek ($|\boldsymbol{U}_i| \cong 1$) pro $R_i, X_i \ll 1$ následovně:

$$\frac{\partial f_i^P}{\partial P_i} = 1 - 2P_i \frac{R_i}{U_i^2} \cong 1 \qquad \frac{\partial f_i^P}{\partial Q_i} = -2Q_i \frac{R_i}{U_i^2} \cong 0 \qquad \frac{\partial f_i^P}{\partial U_i^2} = R_i \frac{S_i^2}{U_i^4} \cong \Delta P_i$$

$$\frac{\partial f_i^Q}{\partial P_i} = -2P_i \frac{X_i}{U_i^2} \cong 0 \qquad \frac{\partial f_i^Q}{\partial Q_i} = 1 - 2Q_i \frac{X_i}{U_i^2} \cong 1 \qquad \frac{\partial f_i^Q}{\partial U_i^2} = X_i \frac{S_i^2}{U_i^4} \cong \Delta Q_i$$

$$\frac{\partial f_i^U}{\partial P_i} = -2\left(R_i - P_i \frac{Z_i^2}{U_i^2}\right) \cong 0 \qquad \frac{\partial f_i^U}{\partial Q_i} = -2\left(X_i - Q_i \frac{Z_i^2}{U_i^2}\right) \cong 0 \qquad \frac{\partial f_i^U}{\partial U_i^2} = 1 - Z_i^2 \frac{S_i^2}{U_i^4} \cong 1$$

tj. determinant Jacobiho matice výše uvedené soustavy nelineárních rovnic je přibližně roven jedné a soustava je tedy jednoznačně řešitelná.

6.3. Poruchový chod sítě

Předpokládejme zdroj třífázového harmonického napětí pracující do sítě s uzemněnou nulou přes podélnou impedanci do místa elektricky vzdáleného třífázového zkratu:

$$u_a(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$
$$u_b(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha - \tfrac{2}{3}\pi)$$
$$u_c(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha + \tfrac{2}{3}\pi)$$

pak pro okamžité hodnoty proudu a napětí dle Kirchhoffových zákonů platí:

$$i_a(t) + i_b(t) + i_c(t) = 0$$
$$u_a(t) = R i_a(t) + L_0 \frac{d}{dt} i_a(t) + M\left(\frac{d}{dt} i_b(t) + \frac{d}{dt} i_c(t)\right)$$

kde R resp. L_0 je odpor resp. indukčnost dané fáze a M je vzájemná indukčnost zbylých dvou fází, pak pro $L = L_0 - M$ a $i_a \equiv i_k$ dostaneme lineární diferenciální rovnici prvního řádu s pravou stranou:

$$L \frac{d}{dt} i_k(t) + R\, i_k(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$

a obecné řešení jí příslušné homogenní rovnice má tvar:

$$i_k(t) = c(t)\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

tj.:

$$\frac{d}{dt} i_k(t) = \dot{c}(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{R}{L} c(t)\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

Výše uvedené řešení spolu s jeho derivací dosadíme do výchozí diferenciální rovnice:

$$L\, \dot{c}(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} - R\, c(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} + R\, c(t)\, e^{-\frac{R}{L}t} = U_m \sin(\omega t + \alpha)$$

tj.:

$$c(t) = \frac{U_m}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} U_m \sin(\omega t + \alpha)\, dt = \frac{U_m}{Z^2}\, e^{\frac{R}{L}t} \left(R \sin(\omega t + \alpha) - \omega L \cos(\omega t + \alpha)\right) + k$$

a po dosazení variované konstanty do obecného řešení homogenní rovnice obdržíme obecné řešení rovnice s pravou stranou:

$$i_k(t) = \frac{U_m}{Z^2}\ (R\ \sin(\omega t + \alpha) - \omega L\ \cos(\omega t + \alpha)) + k\ e^{-\frac{R}{L}t}$$

tj.:

$$i_k(t) = \frac{U_m}{Z}\sin(\omega t + \alpha - \varphi) + k\ e^{-\frac{t}{\tau}}$$

kde $Z^2 = R^2 + X^2$, $X = \omega L$, $\tau = L/R$ a $\mathrm{tg}\,\varphi = X/R > 0$, takže $\varphi \in (0, \pi/2)$.

Pro $X >> R$, tj. $\varphi \to \pi/2$, uvažujme v okamžiku vzniku zkratu, tj. $t = 0$, průchod napětí zdroje nulou, tj. $\alpha = 0$, pak:

$$i_k(0) = -\frac{U_m}{Z} + k = 0$$

a obecné řešení pak po dosazení uvedené počáteční podmínky přejde k řešení partikulárnímu:

$$i_k(t) = \frac{U_m}{Z}(e^{-\frac{t}{\tau}} - \cos\omega t)$$

tvořenému stejnosměrnou složkou, tj. $e^{-\frac{t}{\tau}}$, a střídavou složkou, tj. $\cos\omega t$, z kterého pak lze odvodit základní charakteristiky časového průběhu zkratového proudu, tj. ustálený, nárazový a oteplovací zkratový proud.

Ustálený zkratový proud definujme jako efektivní hodnotu střídavé složky časového průběhu zkratového proudu:

$$I_k^2\ T = \frac{U_m^2}{Z^2}\int_0^T cos^2\omega t\ dt$$

tj. pro $U_m = \sqrt{2}U_f$:

$$I_k = \frac{U_f}{Z}\sqrt{(1 + \frac{sin2\omega T}{2\omega T})}$$

takže pro $T \to 0$:

$$I_k = \frac{U_m}{Z}$$

resp. pro $T = 1/f$, tj. $\omega T = 2\pi$:

$$I_k = \frac{U}{\sqrt{3}Z}$$

kde $U = \sqrt{3}U_f$ je efektivní hodnota sdruženého napětí.

Nárazový zkratový proud definujme jako maximální hodnotu časového průběhu zkratového proudu, tj. v čase $t = \pi/\omega = 0{,}01$ sekundy při $\cos\pi = -1$:

$$I_{km} = \sqrt{2}\, I_k(1 + e^{-\frac{0{,}01}{\tau}}) \qquad\qquad \tau = \frac{X}{\omega R}$$

Oteplovací zkratový proud definujme jako efektivní hodnotu časového průběhu zkratového proudu:

$$I_{ke}^2\, T = 2\, I_k^2 \int_0^T (e^{-\frac{t}{\tau}} - cos\omega t)^2\, dt \qquad \Rightarrow \qquad I_{ke} = \sqrt{2}\, I_k \sqrt{A^2 - 2AB + B^2}$$

$$A^2 = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-2\frac{t}{\tau}}\, dt = \frac{\tau}{2T}(1 - e^{-2\frac{T}{\tau}})$$

$$B^2 = \frac{1}{T}\int_0^T cos^2\omega t\, dt = \frac{1}{2}(1 + \frac{sin2\omega T}{2\omega T})$$

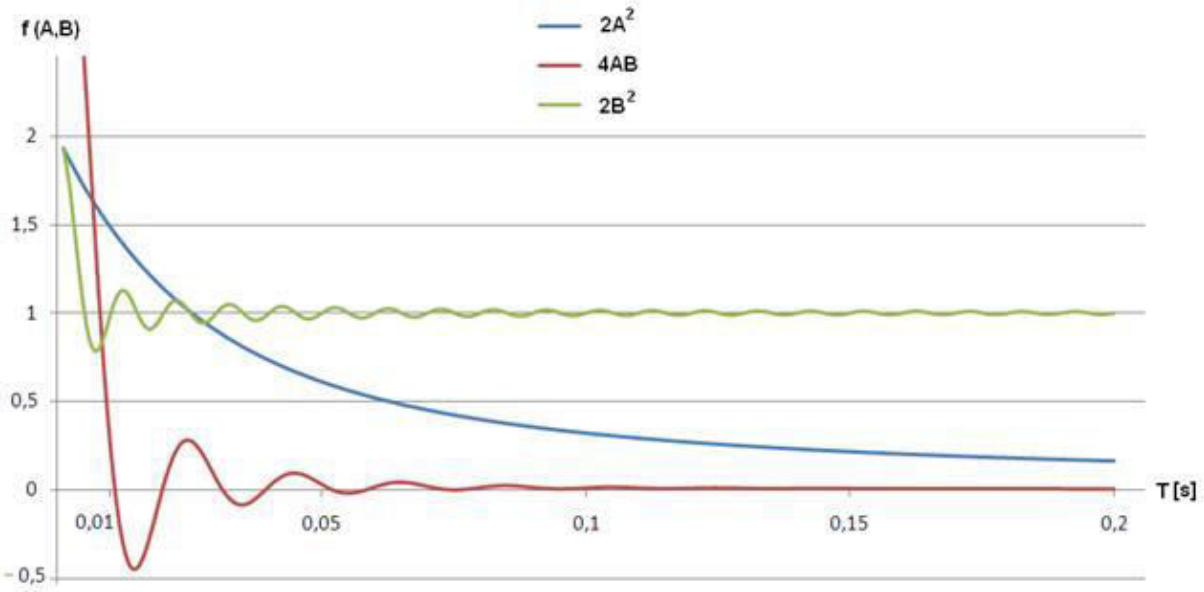
$$AB = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-\frac{t}{\tau}} cos\omega t\, dt = \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2}(\omega^2\tau^2 \frac{sin\omega T}{\omega T} e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{\tau}{T}(1 - cos\omega T\, e^{-\frac{T}{\tau}}))$$

$$\lim_{T\to 0} A^2 = \lim_{T\to 0} B^2 = \lim_{T\to 0} AB = 1$$

$$\lim_{T\to\infty} A^2 = \lim_{T\to\infty} AB = 0\,,\ \lim_{T\to\infty} B^2 = \frac{1}{2}$$

Z určení výše uvedených limit plyne, že pro dobu trvání zkratu $T \to 0$ konverguje $I_{ke} \to 0$ a pro dobu trvání zkratu $T \to \infty$ konverguje $I_{ke} \to I_k$, takže ekvivalentní oteplovací proud se s dobou trvání zkratu T po odeznění stejnosměrné složky blíží k hodnotě rázového zkratového proudu.

Členy $2A^2$ resp. $2B^2$ pro $T \to \infty$ odpovídají časově závislému tepelnému účinku čistě stejnosměrné resp. čistě střídavé složky zkratového proudu, člen $4AB$ zpočátku osciluje okolo nuly, tj. střídavě zesiluje resp. zeslabuje tepelné účinky obou složek, jeho vliv odeznívá v závislosti na tlumení stejnosměrné složky až po určité době trvání zkratu:



Průběh složek ekvivalentního oteplovacího zkratového proudu

Pro účely modelování nesymetrických poruch přejdeme od reálné fázové soustavy $[a, b, c]$ k virtuální fázové soustavě $[0,1,2]$ o netočivé, sousledné a zpětné složce pomocí následující transformace:

$$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_0 + E_1 + E_2 \\ E_0 + a^2 E_1 + a\, E_2 \\ E_0 + a\, E_1 + a^2 E_2 \end{bmatrix}$$

kde:

$$a = e^{j\frac{2}{3}\pi} = \cos\frac{2}{3}\pi + j\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad a^3 = 1$$

$$a^2 = e^{j\frac{4}{3}\pi} = \cos\frac{4}{3}\pi + j\sin\frac{4}{3}\pi = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad a^4 = a$$

$$(a^2 - 1) = j\sqrt{3}\, a \qquad (1 - a) = j\sqrt{3}\, a^2 \qquad a^2 + a + 1 = 0$$

pak determinant transformační matice je:

$$detA = a^4 + 2a - 3a^2 = 3a(1 - a) = 3aj\sqrt{3}\, a^2 = 3j\sqrt{3}\, a^3 = 3j\sqrt{3} \neq 0$$

Dále určíme inverzní transformační matici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}$$

kde:

$$A_{11} = a - a^2 \qquad A_{12} = a - a^2 \qquad A_{13} = a - a^2$$

$$A_{21} = a - a^2 \qquad A_{22} = a^2 - 1 \qquad A_{23} = 1 - a$$

$$A_{31} = a - a^2 \qquad A_{32} = 1 - a \qquad A_{33} = a^2 - 1$$

a provedeme zkoušku:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3 & a^2+a+1 & a^2+a+1\\ a^2+a+1 & 2a^3+1 & a^2+a+1\\ a^2+a+1 & a^2+a+1 & 2a^3+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

pak provedeme-li inverzní transformaci:

$$\begin{bmatrix}E_0\\ E_1\\ E_2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_a\\ a^2E_a\\ aE_a\end{bmatrix}=\frac{E_a}{3}\begin{bmatrix}1+a^2+a\\ 1+a^3+a^3\\ 1+a^4+a^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ E_a\\ 0\end{bmatrix}$$

za předpokladu souměrné fázové soustavy $[a, b, c]$:

$$E_a = E_a \qquad E_b = a^2E_a \qquad E_c = aE_a$$

dostaneme:

$$E_0 = 0 \qquad E_1 = E_a \qquad E_2 = 0$$

Výše jsme popsali transformace pro fázory napětí, ty identicky platí i pro fázory proudu, takže pak můžeme zapsat model poruchy v okamžiku vzniku poruchy, kde souměrné napětí zdroje je pokryté úbytkem napětí na souměrných impedancích mezi zdrojem a poruchou, způsobeným nesouměrnými poruchovými proudy, a nesouměrným napětím v místě poruchy:

$$\begin{bmatrix}E_a\\ E_b\\ E_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac}\\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc}\\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_a\\ I_b\\ I_c\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_a\\ U_b\\ U_c\end{bmatrix}$$

tj.:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_0\\ E_1\\ E_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac}\\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc}\\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_0\\ I_1\\ I_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_0\\ U_1\\ U_2\end{bmatrix}$$

tj. po jeho vynásobení inverzní transformací zleva pro souměrné impedance dostaneme:

$$\begin{bmatrix}0\\ E_1\\ 0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac}\\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc}\\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_0\\ I_1\\ I_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_0\\ U_1\\ U_2\end{bmatrix}=$$

a pro identické diagonální resp. mimodiagonální impedance Z_d resp. Z pak dále dostaneme:

$$=\begin{bmatrix}Z_d+2Z & 0 & 0\\ 0 & Z_d-Z & 0\\ 0 & 0 & Z_d-Z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_0\\ I_1\\ I_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}U_0\\ U_1\\ U_2\end{bmatrix}$$

tj. pro $Z_0 = Z_d + 2Z$ a $Z_1 = Z_2 = Z_d - Z$ platí:

$$\begin{bmatrix}0\\ E_1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_0I_0+U_0\\ Z_1I_1+U_1\\ Z_2I_2+U_2\end{bmatrix}$$

Výše uvedený model poruchy je ve tvaru 3 rovnic o 6 neznámých, tj. 3 neznámé musíme vždy zadat, pak můžeme modelovat jednotlivé typy poruch:

třífázový zkrat (symetrická porucha), pro který platí $U_a = U_b = U_c = 0$, tj.:

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad U_0 = U_1 = U_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a \\ a^2 I_a \\ a I_a \end{bmatrix} = \frac{I_a}{3}\begin{bmatrix} 1 + a^2 + a \\ 1 + a^3 + a^3 \\ 1 + a^4 + a^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_a \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_{3f} \equiv I_a = I_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ E_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 I_0 + 0 \\ Z_1 I_1 + 0 \\ Z_2 I_2 + 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad E_1 = Z_1\, I_1$$

dvoufázový zkrat, pro který platí $I_a = 0, I_b = -I_c, U_b = U_c$, tj.:

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_b \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} U_a + U_b + U_b \\ U_a + aU_b + a^2 U_b \\ U_a + a^2 U_b + aU_b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad U_1 = U_2$$

$$\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ -I_b \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ jI_b \\ -jI_b \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_{2f} \equiv I_b = -j\sqrt{3}I_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ E_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \quad + U_0 \\ Z_1 I_1 + U_1 \\ -Z_2 I_1 + U_1 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad E_1 = (Z_1 + Z_2)\, I_1$$

dvoufázový zkrat zemní, pro který platí $I_a = U_b = U_c = 0$, tj.:

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} U_a \\ U_a \\ U_a \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad U_0 = U_1 = U_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_0 + I_1 + I_2 \\ I_0 + a^2 I_1 + a\, I_2 \\ I_0 + a\, I_1 + a^2 I_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_0 + I_1 + I_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix}0\\E_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_0I_0+U_1\\Z_1I_1+U_1\\Z_2I_2+U_1\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad E_1=(Z_1+\frac{Z_0Z_2}{Z_0+Z_2})\,I_1$$

neboť pro:

$$I_1=-(I_0+I_2)\qquad\qquad Z_0I_0=Z_2I_2$$

platí:

$$U_1=-Z_0I_0\frac{Z_0+Z_2}{Z_0+Z_2}=-\frac{Z_2I_2\,Z_0+Z_0I_0Z_2}{Z_0+Z_2}=-(I_0+I_2)\frac{Z_0Z_2}{Z_0+Z_2}=I_1\frac{Z_0Z_2}{Z_0+Z_2}$$

z čehož dále plyne:

$$I_0=-\frac{U_1}{Z_0}=-\frac{Z_2I_1}{Z_0+Z_2}\qquad\qquad I_2=-\frac{U_1}{Z_2}=-\frac{Z_0I_1}{Z_0+Z_2}$$

tj.:

$$I_b=-\frac{Z_2I_1}{Z_0+Z_2}+a^2I_1-a\frac{Z_0I_1}{Z_0+Z_2}=\frac{a^2(Z_0+Z_2)-(aZ_0+Z_2)}{Z_0+Z_2}\,I_1=$$

$$=\frac{(a^2-a)Z_0+(a^2-1)Z_2}{Z_0+Z_2}I_1=-j\sqrt{3}\frac{Z_0-aZ_2}{Z_0+Z_2}I_1$$

$$I_c=-\frac{Z_2I_1}{Z_0+Z_2}+a\,I_1-a^2\frac{Z_0I_1}{Z_0+Z_2}=\frac{a(Z_0+Z_2)-(a^2Z_0+Z_2)}{Z_0+Z_2}\,I_1=$$

$$=\frac{(a-a^2)Z_0+(a-1)Z_2}{Z_0+Z_2}I_1=j\sqrt{3}\frac{Z_0-a^2Z_2}{Z_0+Z_2}I_1$$

tj.:

$$I_c+I_b=\;j\sqrt{3}\frac{Z_0-a^2Z_2-Z_0+aZ_2}{Z_0+Z_2}I_1=j\sqrt{3}\frac{a^3j\sqrt{3}Z_2}{Z_0+Z_2}I_1=\;-\frac{3Z_2}{Z_0+Z_2}I_1$$

<u>jednofázový zkrat</u>, pro který platí $U_a=I_b=I_c=0$, tj.:

$$\begin{bmatrix}0\\U_b\\U_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a^2&a\\1&a&a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_0\\U_1\\U_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}U_0+U_1+U_2\\U_0+a^2U_1+aU_2\\U_0+aU_1+a^2U_2\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad U_0+U_1+U_2=0$$

$$\begin{bmatrix}I_0\\I_1\\I_2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&a&a^2\\1&a^2&a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_a\\0\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}I_a\\I_a\\I_a\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad I_{1f}\equiv I_a=3I_1$$

$$\begin{bmatrix}0\\E_1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Z_0I_1+U_0\\Z_1I_1+U_1\\Z_2I_1+U_2\end{bmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad E_1=(Z_0+Z_1+Z_2)\,I_1$$

neboť:

$$U_0+U_1+U_2=-Z_0I_1+E_1-Z_1I_1-Z_2I_1=0$$

přerušení jedné fáze, pro které platí $I_a = \Delta U_b = \Delta U_c = 0$, tj.:

$$\begin{bmatrix}\Delta U_0\\ \Delta U_1\\ \Delta U_2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta U_a\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}\Delta U_a\\ \Delta U_a\\ \Delta U_a\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta U_0 = \Delta U_1 = \Delta U_2 = \frac{1}{3}\Delta U_a$$

$$\begin{bmatrix}0\\ I_b\\ I_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_0\\ I_1\\ I_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}I_0 + I_1 + I_2\\ I_0 + a^2 I_1 + a\, I_2\\ I_0 + a\, I_1 + a^2 I_2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_0 + I_1 + I_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix}0\\ E_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Z_0 I_0 + \Delta U_1\\ Z_1 I_1 + \Delta U_1\\ Z_2 I_2 + \Delta U_1\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad E_1 = (Z_1 + \frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2})\, I_1$$

pozn.: analogie dvoufázového zkratu zemního

přerušení dvou fází, pro které platí $\Delta U_a = I_b = I_c = 0$, tj.:

$$\begin{bmatrix}0\\ \Delta U_b\\ \Delta U_c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a^2 & a\\ 1 & a & a^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta U_0\\ \Delta U_1\\ \Delta U_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\Delta U_0 + \Delta U_1 + \Delta U_2\\ \Delta U_0 + a^2 \Delta U_1 + a\Delta U_2\\ \Delta U_0 + a\Delta U_1 + a^2 \Delta U_2\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta U_0 + \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix}I_0\\ I_1\\ I_2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & a^2\\ 1 & a^2 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_a\\ 0\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}I_a\\ I_a\\ I_a\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad I_0 = I_1 = I_2 = \frac{1}{3} I_a$$

$$\begin{bmatrix}0\\ E_1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Z_0 I_1 + \Delta U_0\\ Z_1 I_1 + \Delta U_1\\ Z_2 I_1 + \Delta U_2\end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad E_1 = (Z_0 + Z_1 + Z_2)\, I_1$$

pozn.: analogie jednofázového zkratu

Pro zobecněný model poruchy:

$$E_1 = Z\, I_1 = (Z_1 + \Delta Z)\, I_1$$

kde ΔZ chápeme jako elektrickou vzdálenost ekvivalentní symetrické poruchy od místa poruchy, pak poruchové proudy pro jednotlivé typy poruch můžeme dále přehledně vyjádřit:

$I_{3f} = I_1$	$\Delta Z = 0$	$I_{2f} = -j\sqrt{3} I_1$	$\Delta Z = Z_2$
$I_{2fz} = -j\sqrt{3}\frac{Z_0 - aZ_2}{Z_0 + Z_2} I_1$	$\Delta Z = \frac{Z_0 Z_2}{Z_0 + Z_2}$	$I_{1f} = 3 I_1$	$\Delta Z = Z_0 + Z_2$

Pro $Z_1 = Z_2 = jX_1$ a $Z_0 = jX_0$ můžeme vyjádřit vztahy mezi nesymetrickými poruchovými proudy a poruchovým proudem symetrickým:

$$I_{3f} = I_1 = \frac{E_1}{Z_1} = -j\frac{E_1}{X_1}$$

$$I_{1f} = 3I_1 = 3\frac{E_1}{Z_0 + Z_1 + Z_2} = \frac{X_1}{(X_0 + 2X_1)} I_{3f} = \frac{3}{\frac{X_0}{X_1} + 2} I_{3f}$$

$$I_{2f} = -j\sqrt{3} I_1 = -j\sqrt{3}\frac{E_1}{Z_1 + Z_2} = -j\sqrt{3}\frac{X_1}{2X_1} I_{3f} = -j\frac{\sqrt{3}}{2} I_{3f}$$

$$I_{2fz} = -j\sqrt{3}\frac{Z_0 - aZ_2}{Z_0 + Z_2} I_1 = -j\sqrt{3}\frac{Z_0 - aZ_2}{Z_0 + Z_2}\,\frac{E_1}{Z_1 + \frac{Z_0\, Z_2}{Z_0 + Z_2}} =$$

$$= -j\sqrt{3}\frac{X_0 - aX_1}{X_0 + X_1}\,\frac{X_1}{X_1 + \frac{X_0\, X_1}{X_0 + X_1}} I_{3f} = -j\sqrt{3}\frac{X_1(X_0 - aX_1)}{X_1(X_0 + X_1) + X_0 X_1} I_{3f} =$$

$$= -j\sqrt{3}\frac{X_0 - aX_1}{2X_0 + X_1} I_{3f} = -j\sqrt{3}\frac{\frac{X_0}{X_1} - a}{2\frac{X_0}{X_1} + 1} I_{3f}$$

$\frac{X_0}{X_1} \to 0 \quad \Rightarrow \quad I_{1f} = \frac{3}{2} I_{3f} \qquad I_{2fz} = \quad j\sqrt{3}\, a\, I_{3f} \qquad = -\frac{1}{2}(3 + j\sqrt{3})\, I_{3f}$

$\frac{X_0}{X_1} \to 1 \quad \Rightarrow \quad I_{1f} = I_{3f} \qquad I_{2fz} = -j\sqrt{3}\, j\sqrt{3}\, \frac{a^2}{3} I_{3f} = -\frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3})\, I_{3f}$

$\frac{X_0}{X_1} \to \infty \quad \Rightarrow \quad I_{1f} = 0 \qquad I_{2fz} = -j\frac{\sqrt{3}}{2}\; I_{3f}$

$$\left|-\frac{1}{2}(3 + j\sqrt{3})\right| = \sqrt{3} \qquad \left|-\frac{1}{2}(1 + j\sqrt{3})\right| = 1 \qquad \left|-j\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. Lagrangeova optimalizace

Mějme optimalizační úlohu:

$$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad f(\vec{x}_0) = \min_{\vec{x} \in \Omega} f(\vec{x}) \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

kde $\vec{x}_0$ je optimum, Ω vymezuje oblast přípustných řešení optimum obsahující, a f představuje objektivní funkci.

Uvažujme optimalizační úlohu s následující oblastí přípustných řešení:

$$\vec{g}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \Omega = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \right\} \quad m < n \quad (1)$$

kde f, g_j jsou spojitě diferencovatelné funkce a dále zaveďme tzv. Lagrangeovu funkci:

$$F: \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R} \quad F(\vec{z}) = f(\vec{x}) + \vec{\alpha}.\vec{g}(\vec{x}) \quad \vec{z} = [\vec{x}, \vec{\alpha}] \quad (2)$$

kde složky vektoru $\vec{\alpha}$ jsou tzv. „Lagrangeovy multiplikátory“, pak za předpokladu lineární nezávislosti vektorů $\nabla g_1(\vec{x}), \dots, \nabla g_m(\vec{x})$ je nutná podmínka existence lokálního extrému funkce (2) v bodě $\vec{z}_0$ ve tvaru $\nabla F(\vec{z}_0) = \vec{0}$, tj.:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_j \alpha_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = g_j = 0$$

kde $i \in \{1, -, n\},\ j \in \{1, -, m\}$.

Zaměníme-li v oblasti přípustných řešení (1) rovnost za nerovnost, tj. přejdeme-li od omezení ve tvaru rovností k omezení ve tvaru nerovností, můžeme se vrátit zpět k omezení ve tvaru rovností ekvivalentním vyjádřením následujících omezení a Lagrangeovy funkce zavedením pomocné proměnné $\vec{y}$:

$$\Omega = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n \middle| \vec{g}(\vec{x}) + \vec{y} = \vec{0} \right\} \quad (3)$$

$$F(\vec{z}) = f(\vec{x}) + \vec{\alpha}.(\vec{g}(\vec{x}) + \vec{y}) \ \ \vec{z} = [\vec{x}, \vec{y}, \vec{\alpha}] \quad (4)$$

spolu s ekvivalentními nutnými podmínkami existence lokálního extrému funkce v bodě $\vec{z}_0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_j \alpha_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} = \alpha_j = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_j} = g_j + y_j = 0$$

Uvažujme nyní obecně omezení úlohy pouze ve tvaru: $\Omega = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | \vec{x} \geq \vec{0}\}$, pak pro optimální vnitřní resp. hraniční bod z **Ω** platí:

$$\forall i \quad x_{0i} > 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_{0i}} = 0$$

resp.

$$\exists j \quad x_{0j} = 0 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_{0j}} \geq 0$$

kde $i, j \in \{1, -, n\}$, takže zřejmě pro libovolný optimální bod z **Ω** platí:

$$\forall i \quad x_{0i} \frac{\partial f}{\partial x_{0i}} = 0 \quad (5)$$

tj. pak můžeme nutnou podmínku existence lokálního extrému funkce v bodě $\vec{x}_0$ zapsat pomocí (5) ve tvaru:

$$\nabla f(\vec{x}_0) \geq \vec{0} \qquad \vec{x}_0 \,.\, \nabla f(\vec{x}_0) = 0 \quad (6)$$

Vzhledem k výše uvedenému dostaneme pro $\vec{x} \geq \vec{0}$ a $\vec{y} \geq \vec{0}$ následující soustavu nutných podmínek existence lokálního extrému funkce (4) analogicky s (6) v bodě $\vec{z}_0$:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \geq \vec{0} \quad \vec{x}_0 \,.\, \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \vec{y}} \geq \vec{0} \quad \vec{y}_0 \,.\, \frac{\partial F}{\partial \vec{y}} = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial \vec{\alpha}} = \vec{g}(\vec{x}_0) + \vec{y}_0 = \vec{0}$$

a úpravou uvedených podmínek můžeme vypuštěním pomocné proměnné $\vec{y}$ vyjádřit nutné podmínky existence lokálního extrému funkce (2) v bodě $\vec{z}_0$ na oblasti vymezené nerovnostmi v tzv. „Kuhn-Tuckerově“ kompaktním symetrickém tvaru:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \geq \vec{0} \qquad \vec{x}_0 \geq \vec{0} \qquad \vec{x}_0 \,.\, \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} = 0 \quad (7)$$

$$\vec{g}(\vec{x}_0) \leq \vec{0} \qquad \vec{\alpha}_0 \geq \vec{0} \qquad \vec{\alpha}_0 \,.\, \vec{g}(\vec{x}_0) = 0 \quad (8)$$

a bod $\vec{z}_0$ je tzv. „sedlovým“ bodem funkce (2), tj. Lagrangeova funkce v něm nabývá svého minima resp. maxima vzhledem k proměnným $\vec{x}$ resp. $\vec{\alpha}$ a dle (8) platí $F(\vec{z}_0) = f(\vec{x}_0)$, takže $\vec{x}_0$ je zřejmě hledané optimum kriteriální funkce f na oblasti vymezené omezujícími podmínkami ve tvaru nerovností.

Sedlový bod funkce (2) pak získáme řešením soustavy n+m nelineárních rovnic o n+m neznámých určené skalárními součiny (7) a (8) s následující Jacobiho maticí:

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H} & \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{F} & \boldsymbol{G} \end{bmatrix}$$

kde:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \cdots & x_1 \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n} + x_n \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} x_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & x_1 \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \cdots & x_n \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \alpha_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_m \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \alpha_m \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} g_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & g_m \end{bmatrix}$$

Pro $\frac{\partial F}{\partial x_i} \neq 0$ a $g_j \neq 0$ je zřejmě výše uvedená Jacobiho matice regulární, pak podle věty o pevném bodě existuje jednoznačné řešení zmíněné soustavy nelineárních rovnic.

7.1. Optimální chod sítě

Úloha minimalizace ztrát přenášeného činného výkonu sítí o *n*-uzlech je optimalizační úloha minimalizace následující objektivní funkce závislé na velikostech a úhlech uzlových napětí:

$$f(\vec{U},\vec{\varphi}) = \frac{1}{4}\sum_{i\in\{1,\cdots,n-1\}}\sum_{j\in\{i+1,\cdots,n\}}(P_{ij}+P_{ji})^2$$

kde:

$$P_{ij} = A_{ij}{U_i}^2 - U_i p_{ij} U_j\left(A_{ij}\cos\alpha_{ij} - B_{ij}\sin\alpha_{ij}\right)$$
$$P_{ji} = A_{ij}p_{ij}^2{U_j}^2 - U_i p_{ij} U_j\left(A_{ij}\cos\alpha_{ij} + B_{ij}\sin\alpha_{ij}\right)$$

resp.

$$Q_{ij} = B_{ij}{U_i}^2 - U_i p_{ij} U_j\left(B_{ij}\cos\alpha_{ij} + A_{ij}\sin\alpha_{ij}\right)$$
$$Q_{ji} = B_{ij}p_{ij}^2{U_j}^2 - U_i p_{ij} U_j\left(B_{ij}\cos\alpha_{ij} - A_{ij}\sin\alpha_{ij}\right)$$

a

$$A_{ij} = \frac{R_{ij}}{Z_{ij}^2} \quad B_{ij} = \frac{X_{ij}}{Z_{ij}^2} \quad Z_{ij}^2 = R_{ij}^2 + X_{ij}^2 \quad \alpha_{ij} = \varphi_i - \varphi_j \quad p_{ij} = \frac{U_i^{nom}}{U_j^{nom}} \quad U_i^{nom} \geq U_j^{nom}$$

a kde P_{ij} resp. Q_{ij} je činný resp. jalový výkon vytékající z *i*-tého uzlu směrem do *j*-tého uzlu po větvi o parametrech R_{ij}, X_{ij} přepočtených k *i*-tému uzlu. Přípustná řešení jsou vymezena následujícími nerovnostmi:

$$I_{ij} \leq I_{ij}^{max}$$
$$U_i^{min} \leq U_i \leq U_i^{max}$$

Pro doplnění určeme následující derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial U_i} = A_{ij}(U_i - p_{ij}U_j\cos\alpha_{ij})$$
$$\frac{\partial f}{\partial U_j} = p_{ij}A_{ij}(p_{ij}U_j - U_i\cos\alpha_{ij})$$
$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} = -\frac{\partial f}{\partial \varphi_j} = A_{ij}U_i p_{ij}U_j\sin\alpha_{ij}$$

tj. derivace objektivní funkce dle velikosti napětí má fyzikální rozměr proudu a derivace objektivní funkce dle úhlu napětí má fyzikální rozměr výkonu.

7.2. Řazení zdrojů

Úloha minimalizace nákladů vyráběného činného výkonu je optimalizační úloha minimalizace provozních a najížděcích nákladů na výrobu objemu elektrické energie daného predikcí její spotřeby uvažovaného období vzorkovaného zvolenými řezy, tj. plán řazení zdrojů a jimi generovaných výkonů pokrývajících predikovanou spotřebu v každém řezu daného období.

Objektivní funkci danou součtem provozních a najížděcích nákladů zdrojů integrovaných přes dané období vyjádříme následovně:

$$f(\boldsymbol{P},\boldsymbol{x}) = \sum_t \sum_i (A_i + B_i P_i(t) + C_i P_i^2\,(t)\; + D_i(1 - e^{-\frac{\Delta T_i(t)}{\tau_i}}))\; x_i(t)$$

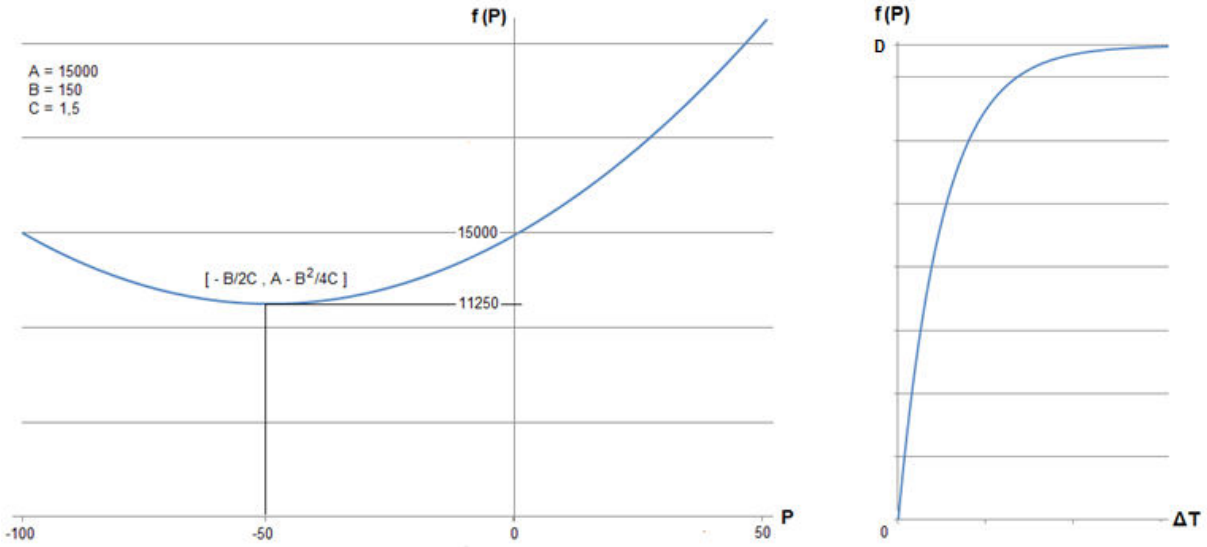
kde $i \in \{1,-,N\}$, $t \in \{1,-,T\}$ a $P_i(t)$ resp. $x_i(t)$ je výkon resp. stav *i*-tého zdroje v čase *t*, dále A_i, B_i, C_i, D_i resp. $\Delta T_i(t)$ a τ_i jsou příslušné nákladové koeficienty resp. doba odstávky a časová konstanta exponenciálního nárůstu najížděcích nákladů *i*-tého zdroje v čase *t*, a dále *N* resp. *T* je počet zdrojů v síti resp. počet časových řezů uvažovaného období nasazení zdrojů.

$\boldsymbol{P},\boldsymbol{x}$ jsou matice nezávisle proměnných objektivní funkce řádu N, T a jejich přípustná řešení jsou vymezena následujícími nerovnostmi resp. rovností:

$$P_i^{min} \le P_i \le P_i^{max}$$

$$\sum_i P_i(t)\; x_i(t) = C(t)$$

kde $i \in \{1,-,N\}$ a $C(t)$ představuje predikci spotřeby v příslušném řezu uvažovaného období.



Příklad průběhu provozních resp. najížděcích nákladů

8. Fourierova transformace

Uvažujme množinu reálných funkcí $H = \{f \mid f - spojitá\ na\ \langle a,b\rangle\}$, kde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $\langle a,b\rangle \subseteq \mathbb{R}$, a pro libovolné funkce $f, g \in H$ definujme jejich skalární součin:

$$f \cdot g = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

pak množina H tvoří Hilbertův prostor. Předpokládejme dále:

$$\rho \subset H \qquad dim\, H = \infty \qquad dim\, \rho = n \qquad f \in H \qquad f_n \in \rho \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

a nechť množina $E = \{e_1, \cdots\}$ tvoří ortonormální bázi H a $s_1, \cdots, s_n$ jsou souřadnice f_n vzhledem k E, pak můžeme provést následující ortogonální rozklad f:

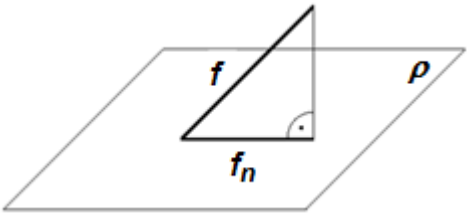
$$|f - f_n|^2 = (f - f_n)\cdot(f - f_n) = f\cdot f - 2f\cdot f_n + f_n \cdot f_n = f\cdot f - 2f\cdot\sum_i s_i e_i + \sum_i s_i^2 =$$
$$= f\cdot f + \sum_i (f\cdot e_i)^2 - 2\sum_i s_i (f\cdot e_i) + \sum_i s_i^2 - \sum_i (f\cdot e_i)^2$$
$$= f\cdot f + \sum_i \big((f\cdot e_i) - s_i\big)^2 - \sum_i (f\cdot e_i)^2$$
$$s_i = f\cdot e_i \quad \Rightarrow \quad |f - f_n|^2 = f\cdot f - \sum_i (f\cdot e_i)^2 = |f|^2 - |f_n|^2 \quad \Rightarrow \quad |f|^2 \geq |f_n|^2 \quad \Rightarrow \quad f \sim f_n$$
$$\lim_{n\to\infty} |f - f_n|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |f|^2 \approx |f_n|^2 \quad \Rightarrow \quad f \approx f_n = \sum_i (f\cdot e_i)\, e_i \qquad i = 1, \cdots, n$$

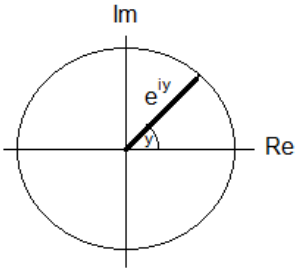
Zaveďme dále komplexní exponenciálu:

$$z = \cos y + i \sin y \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dy} = -\sin y + i\cos y = i(\cos y + i \sin y) = iz \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{z} = i dy$$
$$\int \frac{1}{z} dz = i \int dy \quad \Rightarrow \quad \ln z = iy \quad \Rightarrow \quad z = e^{iy}$$

$$\varphi(x,y) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = \varphi_{Re}(x,y) + i\varphi_{Im}(x,y)$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{Re}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_{Re}}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_{Im}}{\partial x} & \frac{\partial \varphi_{Im}}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = (e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2 = \left|e^{x+iy}\right|^2$$





a dokažme následující tvrzení:

Tvrzení: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad H = \{f \mid f - spojitá\ na\ \langle 0,T\rangle\} \qquad \langle 0,T\rangle \subseteq \mathbb{R}$

$$\{1, \cos\omega t\,, \sin\omega t\,, \cos 2\omega t\,, \sin 2\omega t\,, \cos 3\omega t\,, \sin 3\omega t\,, \cdots\} - ortogonální\ báze\ H$$

Důkaz: $n, m = 1,2,3, \cdots$

$$\int \sin^2 n\omega t\, dt = \frac{1}{n\omega}\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2n\omega}\int (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2n\omega}\int dx - \frac{1}{4n\omega}\int \cos y\, dy =$$
$$= \frac{1}{2n\omega}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2n\omega}\sin 2n\omega t\right) = \psi_5(t)$$

$$\int \cos^2 n\omega t\, dt = \frac{1}{n\omega}\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{n\omega}\int (1-\sin^2 x)dx = \frac{1}{n\omega}\int dx - \frac{1}{n\omega}\int \sin^2 x\, dx =$$
$$= \frac{x}{n\omega} - \frac{1}{2n\omega}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2n\omega}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2n\omega}\sin 2n\omega t\right) = \psi_6(t)$$

$$x = n\omega t \qquad \frac{dx}{dt} = n\omega \qquad y = 2x \qquad \frac{dy}{dx} = 2$$

$$\int_0^T \sin^2 n\omega t\, dt = \psi_5(T) - \psi_5(0) = \frac{1}{2}\left(T - \frac{\sin n2\pi}{2n\omega}\right) - \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\sin 0}{2n\omega}\right) = \frac{T}{2}$$
$$\int_0^T \cos^2 n\omega t\, dt = \psi_6(T) - \psi_6(0) = \frac{1}{2}\left(T + \frac{\sin n2\pi}{2n\omega}\right) - \frac{1}{2}\left(0 + \frac{\sin 0}{2n\omega}\right) = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T dt = (T-0) = T$$

$$\int_0^T \sin n\omega t\, dt = \frac{1}{n\omega}\int_0^{n2\pi} \sin x\, dx = -\frac{1}{n\omega}(\cos n2\pi - \cos 0) = 0$$
$$\int_0^T \cos n\omega t\, dt = \frac{1}{n\omega}\int_0^{n2\pi} \cos x\, dx = \frac{1}{n\omega}(\sin n2\pi - \sin 0) = 0$$

$n \neq m$:

$$\int \sin n\omega t \sin m\omega t\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(n-m)\omega t\, dt - \frac{1}{2}\int \cos(n+m)\omega t\, dt =$$
$$= \frac{1}{2a}\int \cos x\, dx - \frac{1}{2b}\int \cos y\, dy = \left(\frac{1}{2a}\sin x - \frac{1}{2b}\sin y\right) = \left(\frac{1}{2a}\sin at - \frac{1}{2b}\sin bt\right) = \psi_1(t)$$
$$\int \cos n\omega t \cos m\omega t\, dt = \frac{1}{2}\int \cos(n-m)\omega t\, dt + \frac{1}{2}\int \cos(n+m)\omega t\, dt =$$
$$= \frac{1}{2a}\int \cos x\, dx + \frac{1}{2b}\int \cos y\, dy = \left(\frac{1}{2a}\sin x + \frac{1}{2b}\sin y\right) = \left(\frac{1}{2a}\sin at + \frac{1}{2b}\sin bt\right) = \psi_2(t)$$
$$\int \sin n\omega t \cos m\omega t\, dt = \frac{1}{2}\int \sin(n+m)\omega t\, dt + \frac{1}{2}\int \sin(n-m)\omega t\, dt =$$
$$= \frac{1}{2b}\int \sin y\, dy + \frac{1}{2a}\int \sin x\, dx = -\left(\frac{1}{2b}\cos x + \frac{1}{2a}\cos y\right) = -\left(\frac{1}{2b}\cos bt + \frac{1}{2a}\cos at\right) = \psi_3(t)$$
$$\int \cos n\omega t \sin m\omega t\, dt = \frac{1}{2}\int \sin(n+m)\omega t\, dt - \frac{1}{2}\int \sin(n-m)\omega t\, dt =$$
$$= \frac{1}{2b}\int \sin y\, dy - \frac{1}{2a}\int \sin x\, dx = -\left(\frac{1}{2b}\cos x - \frac{1}{2a}\cos y\right) = -\left(\frac{1}{2b}\cos bt - \frac{1}{2a}\cos at\right) = \psi_4(t)$$
$$x = (n-m)\omega t = at \qquad \frac{dx}{dt} = a \qquad y = (n+m)\omega t = bt \qquad \frac{dy}{dt} = b$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t\, dt = \psi_1(T) - \psi_1(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\sin(n-m)2\pi - \frac{1}{b}\sin(n+m)2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\sin 0 - \frac{1}{b}\sin 0\right) = \frac{1}{2}(0-0) - \frac{1}{2}(0-0) = 0$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t\, dt = \psi_2(T) - \psi_2(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\sin(n-m)2\pi + \frac{1}{b}\sin(n+m)2\pi\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\sin 0 + \frac{1}{b}\sin 0\right) = \frac{1}{2}(0+0) - \frac{1}{2}(0+0) = 0$$

$$\int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t\, dt = \psi_3(T) - \psi_3(0) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\cos(n+m)2\pi + \frac{1}{a}\cos(n-m)2\pi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\cos 0 + \frac{1}{a}\cos 0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right) = 0$$

$$\int_0^T \cos n\omega t \sin m\omega t\, dt = \psi_4(T) - \psi_4(0) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\cos(n+m)2\pi - \frac{1}{a}\cos(n-m)2\pi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}\cos 0 - \frac{1}{a}\cos 0\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right) = 0$$

Důsledek:

$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\cos\omega t, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\sin\omega t, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\cos 2\omega t, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\sin 2\omega t, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\cos 3\omega t, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{T}}\sin 3\omega t, \cdots\right\}$ - ortonormální báze H

pak můžeme psát:

$$f(t) \approx \sum_0^\infty a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\ dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\ dt \qquad n = 1,2,3,\cdots$$

$$\cos(n\omega t + \varphi_n) = \cos\varphi_n \cos n\omega t - \sin\varphi_n \sin n\omega t \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_n = \cos\varphi_n \qquad b_n = -\sin\varphi_n \quad \Rightarrow \quad a_n^2 + b_n^2 = 1$$

pozn.:

$$e^{in\omega t} + e^{-in\omega t} = (\cos n\omega t + i\sin n\omega t) + (\cos n\omega t - i\sin n\omega t) = 2\cos n\omega t$$

$$e^{in\omega t} - e^{-in\omega t} = (\cos n\omega t + i\sin n\omega t) - (\cos n\omega t - i\sin n\omega t) = i2\sin n\omega t$$

$$a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t = \frac{a_n}{2}\left(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}\right) - i\frac{b_n}{2}\left(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega t} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega t} = \left(c_n e^{in\omega t} + \bar{c}_n e^{-in\omega t}\right)$$

$$2c_n = (a_n - ib_n) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)(\cos n\omega t - i\sin n\omega t)\, dt \quad \Rightarrow \quad c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt$$

$$2\bar{c}_n = (a_n + ib_n) = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)(\cos n\omega t + i\sin n\omega t)\, dt \quad \Rightarrow \quad \bar{c}_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, e^{in\omega t}\, dt$$

tj.:

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \qquad n \in \mathbb{Z} \qquad a_0 = c_0 = \bar{f} - \text{střední hodnota } f$$

Dvě poslední výše uvedené sumy představují Fourierovu řadu v goniometrickém resp. exponenciálním tvaru, vyjadřujícím rozklad funkce.

Následujícím způsobem lze pak zavést spojitou Fourierovu transformaci užitím limitních přechodů:

$$T\omega = 2\pi \quad \Rightarrow \quad (\ T \to \infty \quad \Rightarrow \quad \omega \to 0\ ) \quad \Rightarrow \quad n\,\omega \equiv \omega \equiv d\omega \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{T\to\infty} Tc_n = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = F(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f(t) = \lim_{T\to\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} T\frac{\omega}{2\pi} c_n e^{in\omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} Tc_n e^{in\omega t}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

pozn.: $F(\omega) - spektrum\ (obraz)\ f(t) \qquad \omega - \text{úhlová } frekvence$